**שאלה 2**

מבנה הנתונים שלנו יכיל 2 מערכים שעובדים בשיטת שלמדנו בקורס, כך שעבור כל מערך נגדיר סדרת פונקציות ערבול שמתאימות לו. סדרת פונקציות הערבול עבור כל מערך יוגדרו כפי שראינו בקורס:

* נגדיר כאשר הם גדלי המערכים בהתאמה.
* נגדיר עבור קטן כלשהו (לדוגמא ניקח (.
* לבסוף נגדיר את סדרת פונקציות הערבול להיות:

על מנת להשתמש בפונקציות הערבול בצורה פשוטה, נגדיר במבנה שלנו את הפעולה (הפונקציה):  
ובנוסף נגדיר במבנה את הפעולה (הפונקציה):

ככה שעבור כל וגודל מערך כלשהו נוכל לקרוא לפונקציות אלו ולקבל את תוצאת הערבול בקלות.  
2 פעולות אלו מתבצעות בסיבוכיות זמן (חישוב מתבצע ב-).

בנוסף, נצטרך לשמור משתנים ולציין נקודות חשובות נוספות:

* נגדיר 2 משתנים עבור כל מערך, שישמרו את כמות האיברים הנמצאים בכל מערך ואת הגודל הכולל של כל מערך.
* בכל פעם שנכניס איבר למבנה הנתונים, ההכנסה תתבצע רק לאחד מן המערכים, ולכן נשמור דגל בשם שיגיד לנו לאיזה מערך נדרש לבצע את ההכנסה. יכול להכיל את הערך או את הערך . אם מערך כלשהו יהיה מלא – לדוגמא מערך – והערך יכיל את הערך , ההכנסה בפועל תהיה אל מערך ולא אל מערך , ולכן ההגדרה המדויקת יותר של משתנה זה היא "להגדיר מיהו המערך שאנו נדרשים להכניס אליו, למעט המקרה שבו מערך זה מלא ואז ההכנסה מתבצעת למערך השני".
* נשמור משתנה ששומר את האיבר הבא שיש להוציא מהמערך (יובהר יותר טוב בהמשך).

כעת, נתאר את מהלך הפעולות על המבנה:

* Init(): נאתחל את מבנה הנתונים על ידי אתחול המערך לגודל קבוע (לדוגמא 100), ונעדכן שגודל המערך הוא 100 וכמות האיברים בו היא 0 בסיבוכיות (אתחול קבוע והשמה פשוטה למשתנים). נאתחל את להיות באורך בשביל השלמות, ונעדכן שגודל המערך הוא 201 וכמות האיברים בו היא 0 בסיבוכיות (אתחול קבוע והשמה פשוטה). נעדכן את להיות בסיבוכיות כדי לציין שהמערך הוא המערך שמבצעים אליו הכנסות כעת. לבסוף, נאתחל את ל-0 בסיבוכיות זמן . סה"כ סיבוכיות הזמן והמקום הם .
* Insert(x): נבדוק את הערך הנמצא בדגל . נניח בה"כ שהערך הוא , ולכן ההכנסה ככל הנראה צריכה להתבצע למערך . נבדוק מה הוא הגודל הכולל של וכמה איברים נמצאים כעת ב- בסיבוכיות זמן (אנו שומרים את ערכים אלו במשתנים). נחלק למקרים:
  + **אם אינו מלא (אם הכמות הנוכחית של האיברים בו קטנה מגודלו – נגלה זאת בסיבוכיות זמן כי אנו שומרים את גדלים אלו):**
    - נכניס את האיבר למערך על ידי שימוש בפונקציה

כפי שלמדנו בקורס, תוך קידום של עד אשר לא תהיה התנגשות איברים. בממוצע על הקלט, סיבוכיות הזמן להכנסה היא כפי שלמדנו.

* + - נגדיל ב-1 את המשתנה ששומר את כמות האיברים במערך כי הוספנו איבר חדש ל-. ההגדלה מתבצעת בסיבוכיות זמן .
    - נציין כי *המשמעות של האינדקס היא האינדקס של האיבר הבא שיש להעביר מ- ל-. לכן,* נעביר את האיבר הנמצא באינדקס במערך אל המערך על ידי מחיקתו מ- והכנסתו ל- תוך שימוש בפונקציה

*ובמקרה של התנגשות נקדם את עד אשר לא תהיה התנגשות. נחסר 1 מ- כדי שיצביע על האינדקס של האיבר הבא שיש להעביר מ- ל-. בממוצע על הקלט, סיבוכיות הזמן למחיקה והכנסה היא כפי שלמדנו.*

*הכנסת איבר חדש ל- והעברת איבר מ- ל- מתבצעים בסיבוכיות זמן בממוצע על הקלט, כפי שהראינו, ובסיבוכיות מקום כי לא הקצינו זיכרון דינמי חדש.*

* + **אחרת, אם מלא, כלומר אם כמות האיברים ב- זהה לגודל המערך , זה אומר שמערך ריק – כלומר אין בו אף איבר ששייך למבנה (נוכיח בהמשך – (1)):**
    - נמחק את מערך בסיבוכיות זמן .
    - נאתחל מחדש את מערך להיות בגודל בסיבוכיות זמן כאשר הוא גודל המערך (הסיבוכיות היא כאשר נשתמש בשיטה של אתחול מערכים ב- שלמדנו בקורס).
    - נעדכן את המשתנה השומר את גודל המערך להיות , ונעדכן את המשתנה ששומר את כמות האיברים ב- להיות 0.
    - נכניס את האיבר למערך על ידי שימוש בפונקציה

כפי שלמדנו בקורס. לא יכולה להיות התנגשות כי מערך הוא מערך שאין בו אף איבר, ולכן נבחר ב-. סיבוכיות זמן ההכנסה אם כן היא .

* + - נעביר את הגודל למשתנה כדי לציין את העובדה שבהכנסה הבאה האיבר שאותו יהיה להעביר מ- ל- נמצא באינדקס במערך .
    - נמחק את האיבר הנמצא באינדקס במערך , ונעביר אותו למערך על ידי שימוש בפונקציה

כפי שלמדנו בקורס. אם יש התנגשות עבור , נשתמש ב-. לכן סיבוכיות הזמן של ההכנסה היא .

* + - נחסר 1 מ-, כך שיהיה שווה ל- כדי לציין את העובדה שבהכנסה הבאה האיבר שאותו יהיה להעביר מ- ל- נמצא באינדקס במערך , ונקטין ב-1 את המשתנה ששומר את כמות האיברים הנמצאים ב- מכיוון שהסרנו איבר 1 מ-.

יצירת המערך , הכנסת האיבר אליו והעברת איבר מ- ל- מתבצעים בסיבוכיות זמן . אם היה איברים במבנה לפני יצירת , סיבוכיות המקום היא , ולאחר יצירת סיבוכיות המקום תישאר כי גודלו של הוא .

* + - נוכיח את (1): לפי האלגוריתם שהצענו, אם מלא, ונניח שגודלו הוא , זה אומר שבטוח ביצענו פעולות הכנסה אל תוך . אם גודל המערך הוא , זה אומר שגודל המערך הוא לכל היותר , כי בכל פעם שמערך אחד מתמלא אנו מגדירים את גודלו של השני להיות פעמיים הגודל של המערך המלא ועוד 1. לכן, אם ביצענו פעולות הכנסה, זה אומר שהעברנו איברים מ- ל- ולכן רוקנו את מערך בוודאות.
* : נשלוף את גודלם של ו-, ועבור כל אחד מהם נחשב את פונקציית הערבול המתאימה:

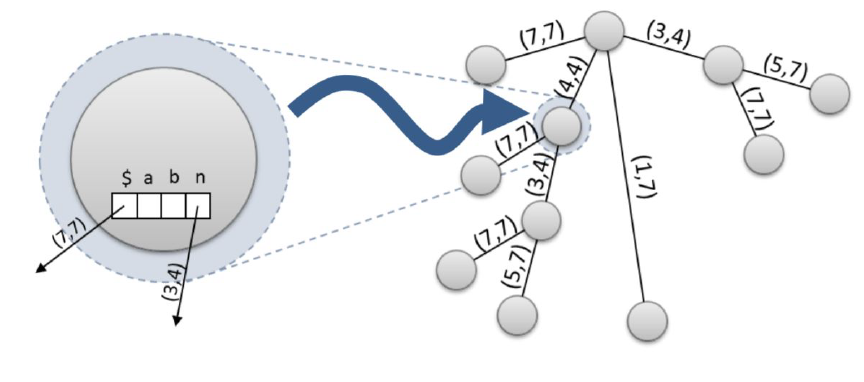
*נחפש את בכל אחד מהמערכים בסיבוכיות זמן בממוצע על הקלט, כפי שלמדנו בקורס. אם מצאנו את ב-1 מהם, נחזיר אותו.*

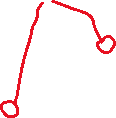
**נוכיח את סיבוכיות המקום:**

נניח ש-2 המערכים במבנה הם מאורך ו-. אנו מבצעים הגדלה למערך מסוים רק אם המערך השני התמלא. לכך המערך באורך קיבל את אורכו לאחר מילוי המערך באורך באיברים. מכיוון שאנו לא מבצעים הסרה של איברים, בכל עת במבנה יש לנו לפחות איברים (כי אחרת לא היינו מבצעים הגדלה למערך השני להיות באורך ). בנוסף, יש לנו לכל היותר איברים במבנה כי אחרת היינו מבצעים הגדלה של המערך להיות באורך על פי הגדלת המבנה. כלומר יש לנו לפחות ולכל היותר איברים במבנה. בנוסף, קיימים לנו כמות משתנים סופית ששומרת פרמטרים נוספים, ולכן עבור איברים במבנה סיבוכיות המקום היא כי אנו שומרים מערכים שאוכם הכולל הוא לכל היותר ועוד כמות סופית של משתנים לא דינמיים.

**שאלה 4**

יהי עץ סיומות דחוס המייצג את הסיומות של מחרוזת כלשהי. אזי, כל קשת היוצאת משורש העץ מייצגת התחלה של סיומת בעץ, כך שכל הקשתות מייצגות את התחלתן של כל הסיומות הקיימות במחרוזת. בנוסף, כל עלה בעץ מייצג סיומת אחת בלבד, כפי שלמדנו. הקשת שבה האינדקסים הם מייצגת את תת המחרוזת במחרוזת , המתחילה בתו שהאינדקס שלו הוא ומסתיימת בתו שהאינדקס שלו הוא . לכן כדי לקבוע את אורך של סיומת כלשהי נצטרך לסכום את אורכי כל תתי המחרוזות שמוכלים בסיומת ומיוצגים על ידי הקשתות הנמצאות במסלול של הסיומת. עבור כל צומת שהאינדקסים שלה הם , ההפרש מייצג את כמות התווים של התת מחרוזת אותה הקשת מייצגת. אם נקבל שהאורך הוא 1, כלומר הקשת מייצגת תו בודד. אם נקבל ש- כלומר הקשת מייצגת 2 תווים וכו'. לכן, נגדיר את **אורך המסלול של סיומת** כסכום ההפרשים עבור כל קשת שהאינדקסים בה הם , אשר נמצאת במסלול היוצא מהשורש ומסתיים בעלה המייצג את הסיומת. לדוגמא:

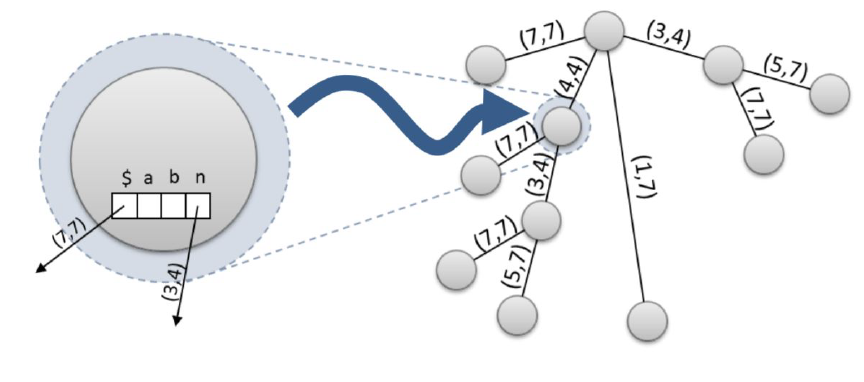




* אורך מסלול הסיומת של הסיומת המיוצגת על ידי העלה האדום הוא (4-4+1)+(4-3+1)+(7-5+1)=6. במקרה של מספר זה מייצג את אורך הסיומת , שאורכה הוא 6.
* אורך מסלול הסיומת של הסיומת המיוצגת על ידי העלה הכחול הוא (4-3+1)+(7-7+1)=3. במקרה של מספר זה מייצג את אורך הסיומת שהוא כמובן 3.

**כעת נתאר את מהלך האלגוריתם:**

* נבנה מערך של תווים באורך אשר בסוף יכיל את המחרוזת אותה אנו משחזרים. סיבוכיות הזמן לאתחול היא .
* לכל בן של השורש:
  + בנה מערך של מספרים באורך בסיבוכיות זמן .
  + בנה מצביע למספר שמייצג את כמות המספרים הנוכחית במערך, ואתחל את ל-0.
  + הכנס ל- את כל אורכי מסלולי הסיומות היוצאים מהשורש, עוברים דרך , ומגיעים לעלה (נסביר בהמשך כיצד נבצע זאת). ייתכנו בסה"כ עלים מכיוון שיש בסה"כ סיומות, ולכן יהיו לכל היותר מסלולים היוצאים מהשורש, העוברים דרך , ומגיעים לעלה. כלומר, המערך לכל היותר יתמלא, אך לא תיתכן שגיאה שקשורה לגודלו. המערך , המכיל כעת את כל אורכי מסלולי הסיומות, בעצם מכיל את כל אורכי הסיומות שמתחילות בקשת היוצאת מהשורש אל . לדוגמא, עבור הקשת המסומנת באדום:





המערך יכיל את המספרים , כאשר 2 מייצג את המסלול האדום ואז הסגול, 6 מייצג את המסלול האדום ואז התכלת, ו-4 מייצג את המסלול האדום ואז הכתום.